Sesión Olímpica 31 de Enero, polinomios y desigualdades

José Manuel Sánchez Cuadrado

31/1/20

1. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{y} \quad Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

cuyas raices son x_1, x_2, x_3 y $1/x_1,\ 1/x_2,\ 1/x_3$ respectivamente. Si $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, prueba que $a \cdot A \geq 9$ y $b \cdot B \geq 9$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} &a = -(x_1 + x_2 + x_3), A = -(1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3), \\ &b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \text{ y } B = 1/x_1x_2 + 1/x_1x_3 + 1/x_2x_3, \end{aligned}$$

por tanto,

$$b \cdot B = a \cdot A = 3 + [x_1/x_2 + x_2/x_1] + [x_1/x_3 + x_3/x_1] + [x_2/x_3 + x_3/x_2].$$

Basta ver que $[x_i/x_j + x_j/x_i] \geq 2$, pero esto es equivalente a $(x_i - x_j)^2 \geq 0$, lo cual es cierto en las condiciones del enunciado. □

2. Determinar todos los posibles polinomios P, Q de la forma $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ y $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ tales que sus raíces sean a, b, c y $(a+b)/2$ y $(b+c)/2$ respectivamente.

Demostración. Notamos que $Q(x)$ es la derivada de $P(x)$, por tanto, al ser $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, se tendrá que

$$Q(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c).$$

Sea $y_1 = (a+b)/2$, entonces resulta que

$$Q(y_1) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (x-c)((a+b) - (a+b))$$

y si $y_2 = (b+c)/2$ ocurre que

$$Q(y_2) = -\left(\frac{(b-c)}{2}\right)^2,$$

luego y_1 e y_2 serán raíces si y solo si $a = b$ y $b = c$, es decir, que $P(x) = (x-a)^3$. $\square$

3. Probar la desigualdad

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

para todo x, y con $|x| < 1$ y $|y| < 1$.

Demostración. Por la simetría del problema podemos suponer siempre que $y \leq x$. Si x e y tienen signos opuestos entonces $|x-y| = |x|+|y|$ y $|1-xy| = 1+|xy|$, luego se da la igualdad. Si x, y tienen el mismo signo (podemos suponerlo positivo pues si la desigualdad se cumple para (x, y) también se cumple para $(-x, -y)$), entonces $|x-y| = x-y$ y $|1-xy| = 1-xy$. Expandiendo se llega a que $x^2 \leq 1$, lo cual es cierto. $\square$

4. Sean $x, y, z > 0$,

1. Si $x+y+z \geq 3$, ¿se tiene siempre que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 3$?

2. Si $x+y+z \leq 3$, ¿se tiene siempre que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3$?

Demostración. De las desigualdades de las medias tenemos que

$$\frac{3}{1/x+1/y+1/z} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Si $x+y+z \leq 3$, entonces $1/(x+y+z) \geq 3$, luego $9/(x+y+z) \geq 3$ probandose el segundo enunciado. El primero es falso, basta tomar $z = 1/10000$ y $x = y = 10$. $\square$

5. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2+3mx+m^2-1$, siendo m real. Probar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} P(x_1^3) - P(x_2^3) &= 3(x_1^6 - x_2^6) + 3m(x_1^3 - x_2^3) = \\ &= 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3) + 3m(x_1^3 - x_2^3) = \\ &= 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 + m). \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2).$$

Como $-m = x_1 + x_2$ y $3x_1x_2 = m^2 - 1$ resulta que

$$-m^3 = x_1^3 + x_2^3 - m(m^2 - 1) = x_1^3 + x_2^3 - m^3 + m,$$

de donde se deduce que $x_1^3 + x_2^3 + m = 0$ concluyendo así la demostración. $\square$

6. Dados los polinomios $x^2+a_1x+b_1,\ x^2+a_2x+b_2, \ldots, x^2+a_nx+b_n$, se sabe que sus raíces son $(x_0, x_1),\ (x_0, x_2), \ldots, (x_0, x_n)$ respectivamente. Encontrar razonadamente las raíces del polinomio

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Demostración. Es claro que x_0 es solución pues multiplicando el polinomio por n se obtiene la suma de los polinomios primeros. Llamemos y a la otra solución del polinomio. Se tiene que $-a_i = x_0 + x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y que

$$-\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = x_0 + y.$$

Se tiene que

$$-(a_1 + \cdots + a_n) = nx_0 + (x_1 + \cdots + x_n),$$

luego

$$-\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = x_0 + \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

por lo que $y = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. $\square$

7. Econtrar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 & = 7 \\ \quad x^2y + xy^2 & = -2 \end{cases}$$

Demostración. La primera ecuación se puede escribir como $(x+y)^2-3xy=7$ y la segunda como $xy(x+y)=-2$. Haciendo el cambio de variable $z=xy$ y $w=x+y$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} w^2-3z &= 7 \\ \quad zw &= -2. \end{cases}$$

Despejando w de la segunda y sustituyendo se llega a la ecuación $w^3-7w+6=0$, la cual tiene como solución $w=1$. Tras dividir por $w-1$ nos queda la ecuación de segundo grado $w^2+w-6=0$, la cual tiene como soluciones $w=2$ y $w=-3$. Entonces obtenemos los pares de soluciones $(w,z)=(1,-2),(2,-1)$ y $(-3,2/3)$. Ahora se sustituyen estos valores y se obtienen x e y. $\square$

8. Sean $a,b,c>0$ tales que $abc=1$ probar que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ac}\right)^2\geq\frac{3}{4}.$$

Demostración. Usando que $abc=1$ se puede ver que la desigualdad es equivalente a

$$\left(\frac{ac}{1+c}\right)^2+\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

sin más que multiplicar y dividir c,a,b en cada sumando respectivamente. Esto es equivalente a

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ac}{1+c}\right)^2+\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2\right]}\geq\frac{1}{2}.$$

Aplicando la desigualdad entre la media cuadrática y la media aritmética se deduce que

$$\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ac}{1+c}\right)^2+\left(\frac{ab}{1+a}\right)^2+\left(\frac{bc}{1+b}\right)^2\right]}\geq\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ac}{1+c}\right)+\left(\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{bc}{1+b}\right)\right].$$

Entonces si se probara que

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{ac}{1+c}\right)+\left(\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{bc}{1+b}\right)\right]\geq\frac{1}{2}$$

se tendría el resultado. Multiplicando y dividiendo por b, c, a correspondientemente y usando de nuevo que $abc = 1$, la anterior expresión es equivalente a

$$\frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} + \frac{1}{a(1+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Como tenemos que $abc = 1$, podemos poner $a = \beta/\alpha, b = \gamma/\beta$ y $c = \alpha/\gamma$ para obtener

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2},$$

que es la desigualdad de Nesbitt. $\square$

Apéndice: Desigualdad de las medias y desigualdad de Nesbitt

Dado $x_1, \ldots, x_n$ positivos, definimos la media generalizada $M_p(\underline{x})$ como

$$M_p(\underline{x}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p},$$

para todo $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Para $p = -\infty,\ p = \infty$ y $p = 0$ se definen

$$M_{-\infty}(\underline{x}) = \text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\}, \quad M_{\infty}(\underline{x}) = \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{y} \quad M_0(\underline{x}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

respectivamente.

Teorema. *En las condiciones anterioes, si $p < q$ entonces $M_p(\underline{x}) < M_q(\underline{x})$.*

Corolario. *Para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positivos se tiene*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Estas son conocidas como las medias armónica, geométrica, artimética y cuadrática respectivamente.

Teorema (Desigualdad de Nesbitt)**.** *Para todo $a, b, c > 0$ se tiene*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Demostración. Sumando 3 a ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2},$$

que multiplicando por 2 en ambos miembros y sacar factor común queda como

$$((a+b)+(a+c)+(b+c))\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)\geq 3\cdot 3,$$

de lo que resulta

$$\frac{(a+b)+(a+c)+(b+c)}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}},$$

que es la desigualdad entre la media aritmética y armónica. □